UNIVERSITE LIBANAISE
Institut Universitaire de Technologie

الجامعة اللبنانية
المعهد الجامعي للتكنولوجيا

Concours d'entrée : 10 Septembre 2013
Mathématiques - GC - GIM - GRIT Durée : 2 heures

N.B. : Toutes les questions sont obligatoires

Exercice 1. (4 Pts)

Une maison a un réservoir d'eau d'une capacité de 2 m^3. Au départ il est vide. Ce réservoir est alimenté avec un débit de 0,1 litre/seconde à partir de minuit. La consommation d'eau dans la maison est constante de 0,15 litre/seconde. Cette consommation commence à 5h de matin et se maintient jusqu'à 6h du soir.
Est-ce que la maison manquera d'eau ? Si oui, à quelle heure ? Expliquer votre réponse

Exercice 2. (6 Pts)

Il faut 0,8m^3 de gravier, 0,4m^3 de sable et 300kg de ciment pour fabriquer 1 m^3 de béton. Les prix de ces matériaux sont indiqués dans le tableau suivant :

	m^3 de gravier	m^3 de sable	Tonne de ciment
2012	15 USD	30 USD	120 USD
2013	20 USD	40 USD	140 USD

a) *Quel est le pourcentage d'augmentation du coût du m^3 de béton en 2013 par rapport à 2012?*
b) *Quel est le coût en 2013 d'un poteau de dimensions 80 x 20 x 330 (en cm).*
c) *Quel sera le coût de ce poteau en 2016 en adoptant le même taux d'augmentation du coût du m^3 de béton calculé précédemment.*

Exercice 3. (10 Pts)

Soit l'équation : $z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i=0$ (E) où z est une inconnue appartenant à l'ensemble des nombres complexes.

1) Déterminer le réel α pour que $z = \alpha$ i soit une solution de (E).
2) Déterminer les réels a et b pour que : $z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i=(z-i)(z^2+az+b)$.
3) Résoudre alors (E).
4) Soient A, B et C les points d'affixes respectives i, -1 +2i et -1 -2i.
    a. Trouver l'affixe du point D appartenant à l'axe des abscisses tel que A, B et D soient alignés.
    b. Calculer $\dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_C}$. Déduire la nature du triangle BCD.
    c. Trouver l'affixe du point E sachant que BCE est un triangle équilatéral.

Exercice 4. (10 Pts)

Durant une **période de 40 jours**, Maha a noté le nombre de messages qu'elle recevait chaque jour. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant:

Nombre de messages par jour	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de jours	1	4	3	8	7	7	5	2	3

1) On considère les événements:
   A: "Maha reçoit exactement 3 messages par jour"
   F: "Maha reçoit plus que 5 messages par jour".
   Vérifier que $P(A)=\dfrac{1}{5}$ et $P(F)=\dfrac{1}{4}$.

2) On considère l'événement
S:" Maha reçoit un message de son amie Sanaa".
Si Maha reçoit plus que 5 messages par jour, alors la probabilité de recevoir un message de son amie Sanaa est 0,3. Si Maha reçoit 5 messages ou moins par jour, alors la probabilité de recevoir un message de son amie Sanaa est 0,2.
Calculer les probabilités $P\left(S \cap F\right)$ et $P\left(S \cap \overline{F}\right)$. Déduire P(S).

3) Dans ce qui suit on suppose que le nombre de messages que Maha a reçus chaque jour a **doublé**.
   a- Déterminer la moyenne $\overline{x}$ et la médiane des messages reçus chaque jour par Maha.
   b- Calculer l'écart-type σ. Quel pourcentage de cette série statistique est inclus dans l'intervalle $\left[\overline{x}-\sigma\,;\,\overline{x}+\sigma\right]$.

Exercice 5. (15 Pts)

Soit f la fonction définie sur I =] 0 ; $+\infty$[, par : f (x)= x +1+ ln $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité 2 cm).

1) a- Démontrer que la droite d'équation x = 0 est une asymptote à (C).
   b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation y = x +1 est asymptote à (C).
   c- Etudier la position relative de (C) et de (d).
2) Montrer que f est strictement croissante sur I et dresser son tableau de variations.
3) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α et vérifier que 0,3 < α < 0,4.
4) Tracer (d) et (C).
5) On désigne par g la fonction réciproque de f et par (G) sa courbe représentative.
   a- Déduire les asymptotes de (G) et dresser le tableau de variations de g.
   b- Les courbes (C) et (G) ont un point commun A. Déterminer les coordonnées de A.
6) a- Vérifier que la fonction F, définie sur I, par F(x) = $\dfrac{x^2}{2}$ + x + xlnx – (x + 1)ln(x + 1) est une primitive de f .
   b- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des x et les deux droites d'équations x =1 et x = 2.

Exercice 6. (10 Pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ on donne les points A(0 ; 1 ; – 2) , B(2 ; 1 ; 0) , C(3 ; 0 ; – 3) et H(2 ; 2 ; – 2).

1) Montrer que x – 2y – z = 0 est une équation du plan (P) déterminé par les points H , A et B et que le point C n'appartient pas à ce plan.
2) a-Montrer que le triangle HAB est isocèle en H.
   b- Montrer que (CH) est perpendiculaire à (P).
   c- Déterminer un système d'équations paramétriques d'une bissectrice (δ) de l'angle $A\hat{C}B$.
3) Soit T le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), montrer que T appartient à (δ)

Exercice 7. (5 Pts)

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : y'' + 2y' + y = 0 (E).
2) Déterminer la solution particulière f de cette équation dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé, est tangente au point d'abscisse 0 à la droite d'équation y = –x + 2.