

Concours d'entrée : 8 septembre 2016

Mathématiques : GRIT - GIM - GC

Durée : 2 Heures

**N.B. : Toutes les questions sont obligatoires**

**Exercice 1 (5 Pts)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  $z^2 - 4z + 6 = 0$ .

b) Soient A et M les points d'affixes respectives  $z_A = 3$  et  $z_M = 2 + i\sqrt{2}$ .

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $\frac{z_M - 3}{z_M}$ .

c) En déduire que le triangle OAM est rectangle.

**Exercice 2 (5 Pts)**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :

$$u_1 = 12 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5 \quad \text{pour tout entier naturel } n \geq 1.$$

Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , par :  $v_n = u_n - \frac{15}{2}$ .

a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .

b) Exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c) Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 3 (5 Pts)**

**A** et **B** désignent deux vaccins. Dans une population 40% des individus ont **A** et 80% ont **B**.

On extrait au hasard un individu de la population. Quelle est la probabilité :

a) qu'il ait **A** et **B** ?

b) qu'il ait **A** ou **B** ?

c) qu'il ait **A** sachant qu'il ait **B** ?

**Exercice 4 (5 Pts)**

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_0^1 (x^2 + x - 3)e^{-x} dx$

b)  $\int \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

c)  $\int_2^3 \frac{x^2 + x - 6}{x - 1} dx$

**Exercice 5 (5 Pts)**

Soit l'équation différentielle suivante :  $xy' + (1 - x)y = 0$ .

a) On pose  $z = xy$ . Trouver l'équation différentielle satisfaite par  $z$ .

b) En déduire la solution  $y$ .

### Exercice 6 (5 Pts)

Discuter graphiquement le nombre et les signes des racines de l'équation  $4x^3 - 3x - m = 0$ , où  $m$  est un paramètre réel.

### Exercice 7 (5 Pts)

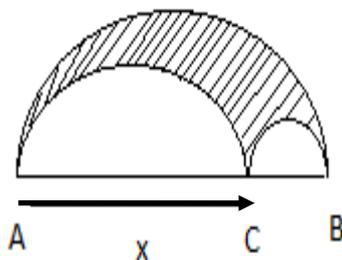
Soit  $\alpha$  un angle tel que  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  avec  $\sin \alpha = k$ .

- Calculer  $\cos \alpha$  en fonction de  $k$ .
- Déterminer, en fonction de  $k$ , l'expression de  $E = \sin\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right) \cos(135\pi - \alpha)$ .
- Déduire la valeur numérique de  $E$  pour  $k = 1/3$ .

### Exercice 8 (5 Pts)

Soient  $[AB]$  un segment de longueur 10 cm et  $C$  un point de  $[AB]$  tel que  $AC = x$ .

On désigne par  $f(x)$  la surface hachurée de la figure suivante contenant trois demi-cercles.



- Quel est le domaine de définition de  $f$ .
- Montrer que  $f(x) = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + 5x\right)$ .
- Montrer que  $f(x)$  possède un maximum pour une valeur  $x_0$  à déterminer.

### Exercice 9 (5 Pts)

Un magasin décide de vendre son stock sous forme de lots :

1 <sup>er</sup> lot	: 5 chemises,	10 cravates,	1 paire de chaussettes;
2 <sup>ème</sup> lot	: 8 chemises,	8 cravates,	2 paires de chaussettes;
3 <sup>ème</sup> lot	: 7 chemises,	7 cravates,	5 paires de chaussettes;

Combien de chaque lot doit-il proposer pour vendre 300 chemises 400 cravates et 96 paires de chaussettes ?

*Note : vous devez résoudre le système d'équations sans utiliser la calculatrice.*

### Exercice 10 (5 Pts)

Soient les points  $A(0 ; 0 ; 1)$  et  $B(2 ; -1 ; 3)$ .

- Ecrire l'équation de la sphère  $(S)$  de diamètre  $[AB]$ .
- Trouver l'ensemble des points  $M(x ; y ; z)$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

Bon Travail