Université Libanaise
Institut Universitaire de Technologie

الجامعة اللبنانية
المعهد الجامعي للتكنولوجيا

Concours d'Entrée (Génie)
Examen de Mathématiques

25 Juillet 2017 **Durée: 2 heures**

N.B.: Les questions 1, 2, 3 et 4 sont obligatoires

Exercice1 (10 Pts)

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \frac{1-\ln x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$$

et on désigne par (C) la courbe représentative de $f$dans un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

A- 1) Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

B- 1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$et déduire une asymptote à (C).

b- Prouver que la droite (d) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C) et étudier, suivant les valeursde x, la position relative de (C) et (d).

2) Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (d) et (C) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5) a- Montrer que f admet sur $[1;+\infty[$une fonction réciproque h et préciser son domaine de définition.

b- Tracer la courbe (Γ) représentative de h dans le même repère que (C).

c- Déterminer l'abscisse du point de (Γ) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $= \frac{x}{2}$.

Exercice 2 (10 Pts)

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère le plan (P) d'équation $x - 2y + 2z - 6 = 0$

etla droite (d) d'équations paramétriques$\begin{cases} x = m+1 \\ y = 2m+1 \\ z = 2m+2 \end{cases}$ $(m \in IR)$

Soit (Q) le plan contenant (d) et perpendiculaire à (P) et A (1 ; 1 ; 2) un point de (d).

1) Montrer que $2x - z = 0$ est une équation du plan (Q).

2) Démontrer que la droite (Δ) d'équations paramétriques$\begin{cases} x = 2t \\ y = 5t-3 \\ z = 4t \end{cases}$ $(t \in IR)$

est la droite d'intersection de (P) et (Q).

3) a- Déterminer les coordonnées du point B intersection de (d) et (Δ).

b- Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de A sur (Δ).

c- Calculer le cosinus de l'angle formé par (d) et (P).

Exercice 3 (10 Pts)

Une urne contient sept boules: quatre rouges et trois vertes.
Un joueur tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) a- Calculer la probabilité que le joueur tire exactement deux boules rouges.

   b- Démontrer que la probabilité, que le joueur tire au moins deux boules rouges, est égale à $\frac{22}{35}$.

2) Après avoir tiré les trois boules, le joueur marque:
   - 9 points s'il tire trois boules rouges;
   - 6 points s'il tire exactement deux boules rouges;
   - 4 points s'il tire exactement une boule rouge;
   - Zéro s'il tire trois boules vertes.

On désigne par X la variable aléatoire égale au score du joueur.
a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Sachant que le joueur a marqué plus que 2 points, calculer la probabilité que son score soit multiple de 3.

Exercice 4 (10Pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 2$.

1) On suppose dans cette partie que $z = 1 + i$.
   a- Montrer que le point M' appartient à la droite d'équation $y = -x$.
   b- Montrer que le triangle OMM' est rectangle en O.
2) Soit I le point d'affixe -2.
   a- Vérifier que $|z' + 2| = 2|z|$.Déduire que $\|\overrightarrow{IM'}\| = 2\|\overrightarrow{OM}\|$.
   b- Démontrer que, lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 2, M' décrit un cercle fixe donton déterminera le centre et le rayon.
3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   a- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
   b- Montrer que si M décrit la droite d'équation $y = -x\sqrt{3}$, alors M' décrit une droite que l'on précisera.

N.B. : Choisir 2 parmi les 3 questions suivantes

Exercice 5 (5 Pts)

Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int cos^2(x)\,dx$ b) $\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$

Exercice 6 (5 Pts)

Soit l'équation différentielle (E) suivante : $y'x - y = x^3$sur]0 ;+∞[.

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'x - y = 0$.
2) Vérifier que la fonction $f(x) = \frac{x^3}{2}$est une solution particulière de (E).
3) Déduire la solution générale de (E).

Exercice 7 (5 Pts)

Trouvez l'équation de la parabole, $y = ax^2 + bx + c$, qui passe par les trois points suivants:(-2, 40), (1, 7), (3, 15).Notez que la résolution du système d'équations doit se faire sans calculatrice.

Bon Travail