Université Libanaise
Institut Universitaire de Technologie

الجامعة اللبنانية
المعهد الجامعي للتكنولوجيا

Concours d'entrée : 26 Juillet 2017
Mathématiques : Informatique de Gestion **Durée : 2 heures**

Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires. Vous devrez choisir 2 parmi les 3 exercices 4,5 et 6.

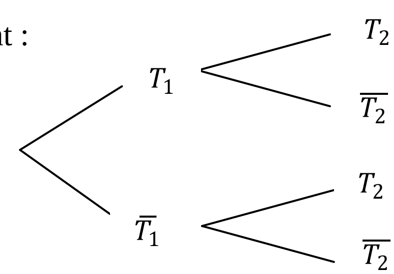
Exercice 1 (16 Pts, obligatoire)

Dans une usine de fabrication de pneus de vélos, chaque produit doit passer deux tests (T1) et (T2). Une étude a montré que :

- 92% des pneus passent le test (T1).
- 95% des pneus ayant passé le test (T1), passent aussi le test (T2).
- 25% de ceux ayant échoué au test (T1), échouent aussi au test (T2).

On sélectionne un pneu au hasard et on considère les événements suivants :
T_1 = « le pneu passe le test (T1) »
T_2 = « le pneu passe le test (T2) ».

On modélise les différentes situations par l'arbre suivant :



1. Donner les valeurs des probabilités sur chaque branche de l'arbre.
2. Calculer la probabilité que le pneu ne passe pas les deux tests : $P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2})$.
3. Calculer les probabilités $P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T_1})$. Déduire que $P(T_2) = 0.934$.
4. Un pneu sélectionné passe le test (T2). Quelle est la probabilité qu'il passe aussi le test (T1) ?
5. Quand le pneu passe les deux tests, on le vend à 16000L.L. Le pneu passant un seul test sera vendu à 8000L.L. et les pneus échouant les deux tests seront donnés gratuitement à une usine de recyclage. Soit X la variable aléatoire représentant le prix d'un pneu produit.
   a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b. Donner la distribution de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique (la moyenne) de X.
   d. Quel doit être le nombre de pneus fabriqués pour que le revenu de l'usine soit 2669760L.L. ?

Exercice 2 (19 Pts, obligatoire)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 2\ln(t+1) + 1$ et $g(t) = \frac{4}{1+e^{-t}}$.

1. Donner les limites de f et g en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de f et g et dresser les tableaux de variation correspondants.
3. Donner l'équation d'une asymptote horizontale pour la fonction g.
4. Tracer les courbes (C) et (G) de f et g respectivement.
5. On admet que les courbes (C) et (G) se coupent en un point d'abscisse $\alpha \approx 3.1$. Etudier graphiquement le signe de $g(t) - f(t)$ suivant les valeurs de t.
6. Calcul des primitives :
    a. Montrer que $g(t) = \frac{4e^t}{e^t+1}$ pour tout t de $[0;+\infty[$. En déduire une primitive de g sur $[0;+\infty[$.
    b. Soit H la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $H(t) = (t+1)\ln(1+t) - t$. Déterminer la dérivée de H et en déduire une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
7. Un plan de restructuration dans une industrie est établi sur 5 ans. On admet que f(t) modélise le nombre d'emplois créés (en milliers d'emplois), et que g(t) modélise le nombre d'emplois supprimés (en milliers d'emplois), en fonction de t représentant le temps en années.
    a. Déterminer le temps nécessaire pour que le nombre d'emplois crées devient supérieur au nombre d'emplois supprimés ?
    b. On admet que sur 5 ans, la variation du nombre d'emplois est donnée par $I = \int_0^5 \big(f(t) - gtdt$. Calculer I et déduire s'il y a plus d'emplois crées ou supprimés sur les 5 ans ?

Exercice 3 (15 Pts, obligatoire)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{2} x(3x^2+1)^3 dx$
2. $\int_1^2 \frac{(3-\ln(x))dx}{x}$
3. $\int_{-2}^{3} |x-2|\, dx$
4. $\int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx$ (intégration par partie)
5. $\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$.

Choisir deux exercices parmi les exercices : 4, 5 et 6.

Exercice 4 (15 Pts)

Un producteur de miel produit 120 litres tous les samedis, qu'il stocke dans un baril de capacité maximale de 300 litres. Supposant que, sur une longue période, la vente du miel est exactement 75 pour cent de la quantité existante. Soit V_n le volume stocké le n$^{\text{ième}}$ samedi après la récolte.

1. Montrer que $V_3 = 157{,}5$ litres et calculer le volume V_4.
2. Exprimer V_{n+1}en fonction de V_n.

On définit, pour tout n entier positif, t_n par : $t_n = 160 - V_n$.

3. Montrer que (t_n) est la suite géométrique de premier terme $t_1 = 40$ et de raison ¼.
4. En déduire les expressions de t_n puis de V_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de (t_n) puis celle de (V_n).
6. Le baril est il assez grand pour stocker la quantité de miel récolté tous les samedis ?

Exercice 5 (15 Pts)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Nabil ouvre un compte d'épargne à une banque donnant un intérêt composé mensuellement au taux de 0.4% (ainsi l'intérêt mensuel calculé pour un montant x est égal à 0.004*x). Nabil dépose la somme de 10000 Dollars au début du mois de Janvier 2006 et ajoutera à son compte chaque mois le montant de 600 dollars (à partir du premier Février). Notons u_n le montant que Nabil possèdera après n mois. On donne alors $u_0 = 10000$ et $u_1 = 10640$.

1. Calculer $u_2\ et\ u_3$,et trouver une relation entre u_{n+1} et u_n.
2. Soit (v_n) la séquence définie pour tout n par : $v_n = u_n + 150000$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on détermine le premier terme et la raison.
   b. Calculer v_n et puis u_n en fonction de n.
   c. Quel est le temps requis pour que Nabil possède 100000 Dollars dans son compte ?

Partie B

Nabil veut investir une somme de 10 000 000L.L. durant 10 ans et doit choisir pour cela entre deux offres :

Offre A : Investir la somme dans une banque donnant un intérêt composé avec un taux annuel de 8%, combiné semestriellement.

Offre B : Investir la somme dans une autre banque donnant un intérêt composé avec un taux annuel de 8%, combiné mensuellement.

Laquelle des deux offres est la plus avantageuse pour Nabil ?

<u>Exercice 6 (15 Pts)</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe $Z_A = -i$ et B le point d'affixe $Z_B = -2i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe Z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe Z' définie par $Z' = \frac{iZ-2}{Z+i}$.

1. Démontrer que si Z est un imaginaire pur, $Z \neq -i$, alors Z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
3. Pour $Z \neq -i$, calculer $|Z' - i| \times |Z + i|$. Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. Développer $(Z + i)^2$ puis factoriser $Z^2 + 2iZ - 2$. Déterminer ensuite l'ensemble de points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer l'ensemble des points E, tels que le module de Z' soit égal à 1 (on pourra remarque que $Z' = \frac{i(Z-Z_B)}{Z-Z_A}$).

Bonne chance